Bsp:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{um Winkel } \alpha]{\text{Rotation}} \mathbb{R}^2 \\ \\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{an einer Ursprungsgeraden}]{\text{Spiegelung}} \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \text{Isometrien}$$

Hier und im Folgenden

$\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarpr.

$\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarpr.

Beweis:

Sei $F$ Isometrie, $\underline{v}$ EV zum EW $\lambda$.

$$\langle F(\underline{v}), F(\underline{v})\rangle = \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle$$

$$\langle F(\underline{v}), F(\underline{v})\rangle = \langle \lambda\cdot\underline{v}, \lambda\underline{v}\rangle = |\lambda|^2\cdot\|\underline{v}\|^2$$

$$\langle \underline{v}, \underline{v}\rangle = \underbrace{\|\underline{v}\|^2}_{\neq 0} \quad (\text{da } \underline{v} \neq \underline{0})$$

Also folgt:

$$|\lambda|^2 = 1$$

Da $|\lambda| \in \mathbb{R}$ und $|\lambda| \geq 0$, folgt

$$|\lambda| = 1. \qquad \square$$

<u>Beweis:</u>

$F_A$ Isometrie

$\iff \langle A \cdot \underline{v}, A \cdot \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ $\quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

$\iff {}^t(A \cdot \underline{v}) \cdot A \cdot \underline{w} = {}^t\underline{v} \cdot \underline{w}$ $\quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

$\iff {}^t\underline{v} \, {}^tA \cdot A \cdot \underline{w} = {}^t\underline{v} \, E_n \cdot \underline{w}$ $\quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

$\iff {}^tA A = E_n$

$\iff A$ invertierbar mit ${}^tA = A^{-1}$

$\iff A \cdot {}^tA = E_n$

Ende Vorl. 19

Das zeigt (i $\iff$ ii).

Sind $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ Spalten von $A$

$$ {}^tA \cdot A = E_n \iff ({}^tA \cdot A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} $$

$$ ({}^tA \cdot A)_{i,j} = {}^t\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = \langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle $$

Also folgt aus (ii), dass Spalten orthonormal sind und da $A$ invertierbar ist, bilden sie eine Basis.

Das zeigt (ii $\Rightarrow$ iii).

(ii $\Leftarrow$ iii) genauso

(ii $\Leftrightarrow$ iv) ähnlich: verwende

$$ A \cdot {}^tA = E_n $$

$\square$

z.B.

$GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ $\quad GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$

$SL_1(\mathbb{R}) = \{1\}$ $\quad SL_1(\mathbb{C}) = \{1\}$

$$O(1) = (\{a \in \mathbb{R} \mid a^{-1} = a\}, \cdot) = (\{1, -1\}, \cdot)$$

$$SO(1) = \{1\}$$

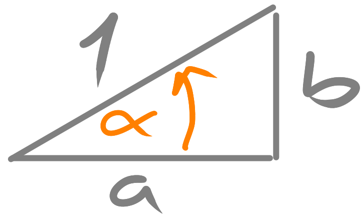
$$O(2) = \{\text{Isometrien von } \mathbb{R}^2\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2; \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} & a^2 + b^2 = 1 \quad (1) \\ \text{und} & c^2 + d^2 = 1 \quad (2) \\ \text{und} & a \cdot c + b \cdot d = 0 \quad (3) \end{array} \right\}$$

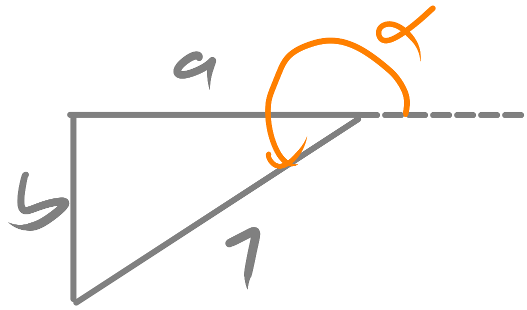
Wegen (1) können wir $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos(\alpha)$

$b = \sin(\alpha)$.

z.B. für $a, b \geq 0$




z.B. für $a, b \leq 0$




Analog wegen ②:

$\exists\, \delta \in [0, 2\pi)$ mit $d = \cos(\delta)$
$c = \sin(\delta)$.

Wegen ③ $a \cdot c + b \cdot d = 0$ ist

$$\underbrace{\cos(\alpha) \cdot \sin(\delta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)}_{\sin(\alpha + \delta)} = 0$$

Also ist $\alpha + \delta \in \mathbb{Z} \cdot \pi$.

Falls $\alpha + \delta = k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$:

$$d = \cos(-\alpha) = \cos\alpha = a$$
$$c = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -b$$

Falls $\alpha + \delta = k \cdot 2\pi + \pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$: . . .

$$d = -a$$
$$c = b.$$

"□"

$$SO(2) = \{\text{Rotationen von } \mathbb{R}^2 \text{ (um } 0)\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{matrix}} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

Bild von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ Bild von $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$
$$= \{\text{Spiegelungen von } \mathbb{R}^2 \text{ an einer Ursprungsgeraden}\}$$

$$\chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}} = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ b & -a-t \end{pmatrix}$$

$$= -(a-t)(a+t) - b^2$$
$$= -(a^2 - t^2) - b^2$$
$$= t^2 - (a^2 + b^2)$$
$$= t^2 - 1$$
$$= (t-1)(t+1)$$

zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren

Daraus folgt:

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar, hat also nach Basiswechsel die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Können aus EV sogar ON-Basis wählen, d.h.

$F_{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}$ ist bezüglich einer ON-Basis durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

darstellbar. Das heißt:

$F_{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}$ ist Spiegelung
(an Geraden durch
EV zum EW 1).